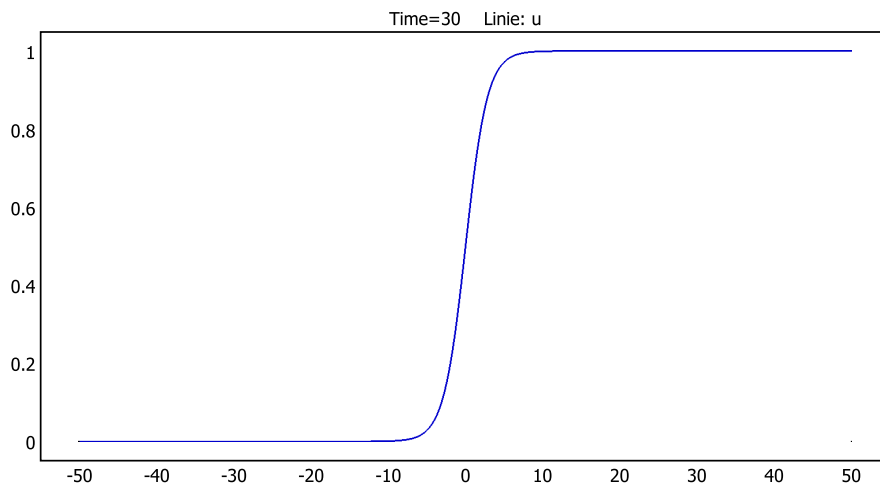


COMSOL Multiphysics Tutorial

Frozen Nagumo-Equation (1D)



Denny Otten
Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik

Einleitung (Mathematischer Hintergrund)

Das Ziel dieses Tutorials ist die Implementierung der eingefrorenen und räumlich eindimensionalen Nagumo-Gleichung mit Hilfe von COMSOL Multiphysics. Die Namensgebung der Gleichung ist auf den japanischen Ingenieur Jin-Ichi Nagumo (1926-1999) zurückzuführen. Dieses gekoppelte System ist gegeben durch

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= \Delta u(x, t) + u(x, t) \cdot (1 - u(x, t)) \cdot (u(x, t) - a) + \lambda \cdot \partial_x u(x, t) & , |x| < 50, t \in]0, \infty[\\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) &= 0 & , |x| = 50, t \in [0, \infty[\\ u(x, 0) &= u_0(x) & , |x| < 50, t = 0 \\ \gamma_t &= \lambda & , t \in]0, \infty[\\ \gamma(0) &= 0 & , t = 0 \\ \langle \partial_x \hat{u}, \hat{u} - u \rangle_{L^2([-50, 50], \mathbb{R}^2)} &= 0 & , t \in]0, \infty[\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $a \in]0, \frac{1}{2}[$ einen reellen Kontrollparameter, $u_0 : [-50, 50] \rightarrow \mathbb{R}$ eine geeignete Anfangsfunktion, $\hat{u} : [-50, 50] \rightarrow \mathbb{R}$ eine geeignete Referenzfunktion und (u, λ) mit $u : [-50, 50] \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ und $\lambda : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ die gesuchte Lösung, wobei $\lambda(t)$ die Translationsgeschwindigkeit der Lösung u zur Zeit t entlang der x -Achse angibt. Für die Referenzfunktion \hat{u} werden wir im weiteren Verlauf die Notation uh verwenden.

1 Die eingefrorene Nagumo-Gleichung (1D)

1. Starte **COMSOL Multiphysics**.

1.1 Modell-Navigator

2. Öffne im **Modell-Navigator** die Registerkarte **Neu**.
3. Wähle dort die Raumdimension **1D**.
4. Klicke im rechten Bildteil anschließend auf den Button **Multiphysik**.
5. Wähle im linken Bildteil **Anwendungsmodi** → **COMSOL Multiphysics** → **Partielle Differentialgleichungen (PDGL)** → **PDGL, Allgemeine Form** → **Zeitabhängige Analyse**.
6. Wähle unter **Abhängige Variablen** u , unter **Name des Anwendungsmodus** PDE und unter **Element** *Lagrange-Linear*.
7. Klicke im rechten Bildteil unter **Multiphysik** auf **Einfügen**.
8. Wähle im linken Bildteil **Anwendungsmodi** → **COMSOL Multiphysics** → **Partielle Differentialgleichungen (PDGL)** → **Schwache Form, Rand** → **Zeitabhängige Analyse**.
9. Wähle unter **Abhängige Variablen** lm , unter **Name des Anwendungsmodus** $phase$ und unter **Element** *Lagrange-Linear*.
10. Klicke im rechten Bildteil unter **Multiphysik** auf **Einfügen**.
11. Bestätige abschließend auf **OK**.

1.2 Konstanten festlegen

12. Wähle in der Menüleiste **Optionen** → **Konstanten...**
13. Gebe in den Spalten **Name**, **Ausdruck**, **Wert** und **Beschreibung** die in der folgenden Abbildung enthaltene Variable und dessen Wert ein. Die Spalte **Wert** wird dabei automatisch aus der Spalte **Ausdruck** erzeugt.

Name	Ausdruck	Wert	Beschreibung
a	0.25	0.25	Parameter, $0 < a < 0.5$

14. Bestätige abschließend auf **OK**.

1.3 Grundgebiet erzeugen

15. Wähle in der Menüleiste **Zeichnen** → **Objekt eingeben** → **Linie...**
16. Gebe im Bereich **Koordinaten** für x den Wert -50 50 ein (jeweils durch ein Leerzeichen voneinander getrennt). Weiter setze **Stil** auf *Polylinie* und trage unter **Name** *Intervall_0_50* ein (50 Intervalllänge, 0 Intervallmittelpunkt).
17. Bestätige die Eingaben auf **OK**.
18. Klicke abschließend auf den Button **Auf alle Objekte zoomen** (rotes Kreuz mit einer Lupe). Alternativ geht dies auch über **Optionen** → **Zoom** → **Auf alle Objekte zoomen**.

1.4 Differentialgleichung definieren

1.4.1 PDGL, Allgemeine Form (PDE)

19. Markiere im **Modell-Verzeichnisbaum** den Eintrag **PDGL, Allgemeine Form (PDE)** durch einen Mausklick mit der linken Taste.

Gebietbedingungen

20. Wähle in der Menüleiste **Physik** → **Gebietbedingungen** (F8)
21. Wähle auf der linken Seite die Registerkarte **Gebiete**, markiere in der **Gebietauswahl** das Gebiet **1** durch einen Mausklick mit der linken Taste und mache einen Haken bei der Check-Box **Aktiv in diesem Bereich**.
22. In der Registerkarte **Koeffizienten** geben wir die folgenden **PDGL-Koeffizienten** ein

Koeffizient	Wert/Ausdruck	Beschreibung
Γ	$-ux$	Flussvektor
F	Fu	Quellterm
e_a	0	Massenkoeffizient
d_a	1	Dämpfung/Massen-Koeffizient

23. In der Registerkarte **Anfangsbedingung** geben wir die folgenden **Anfangswerte** ein

$u(t_0)$	$u0$
$ut(t_0)$	0

24. In der Registerkarte **Element** geben wir in der **Element-Auswahl** unter **Vordefinierte Elemente** *Lagrange-Linear* ein (insofern wir dies zu Beginn vergessen haben). Die Eigenschaften **shape** (Formfunktion), **gporder** (Integrationsordnung), **cporder** (Nebenbedingungs-Ordnung) und **bnd.gporder** (Integrationsgrad für ultraschwachen Term) bleiben dabei unverändert.
25. In der Registerkarte **Schwache Form** lassen wir den Inhalt zu **Beitrag schwachen Form** unverändert.
26. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**.

Randbedingungen

27. Wähle in der Menüleiste **Physik** → **Randbedingungen** (F7)
28. Wähle auf der linken Seite die Registerkarte **Ränder**, markiere in der **Randauswahl** beide Ränder: Dazu markiere durch einen Mausklick mit der linken Taste den Rand 1, halte die Shift-Taste gedrückt und markiere erneut durch einen Mausklick mit der linken Taste den 2. Rand.
29. In der Registerkarte **Koeffizienten** geben wir unter **Randbedingungen** *Neumann-Randbedingung* ein. Für den **Koeffizienten** G wählen wir den **Wert/Ausdruck** 0.
30. Die Registerkarte **Schwache Form** bleibt unverändert.
31. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**.

1.4.2 Schwache Form, Rand (phase)

32. Markiere im **Modell-Verzeichnisbaum** den Eintrag **Schwache Form, Rand (phase)** durch einen Mausklick mit der linken Taste.

Randbedingungen

33. Wähle in der Menüleiste **Physik** → **Randbedingungen...** (F7)
34. Wähle auf der linken Seite die Registerkarte **Ränder**, markiere in der **Randauswahl** (ausschließlich) den Rand **1** durch einen Mausklick mit der linken Taste und mache einen Haken bei der Check-Box **aktiv in diesem Bereich**.

1 Die eingefrorene Nagumo-Gleichung (1D)

35. In der Registerkarte **Schwache Form** geben wir die folgenden **Schwachen Terme** ein

weak	lm_test*pc1	Schwacher Term
dweak	0	Zeitabhängiger schwacher Term
constr	0	Nebenbedingung (constr = 0)
Nebenbedingungstyp	Ideal	
constrf	0	Nebenbedingungskraft

36. In der Registerkarte **Anfangsbedingung** geben wir den folgenden **Anfangswert** ein

lm(t0)	0
lmt(t0)	0

37. In der Registerkarte **Element** geben wir in der **Element-Auswahl** unter **Vordefinierte Elemente** *Lagrange-Linear* ein (insofern wir dies zu Beginn vergessen haben). Die Eigenschaft **shape** bleibt dabei unverändert.

38. Wähle auf der linken Seite erneut die Registerkarte **Ränder**, markiere in der **Randauswahl** den 2. Rand. Entferne anschließend den Haken bei der Check-Box **aktiv in diesem Bereich**.

39. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**.

1.5 Skalare Ausdrücke einbinden

40. Markiere im **Modell-Verzeichnisbaum** den Eintrag **Geom1** durch einen Mausklick mit der linken Taste.

41. Wähle in der Menüleiste **Optionen** → **Ausdrücke** → **Skalare Ausdrücke...**

42. Füge die folgenden skalaren Ausdrücke hinzu, wobei die Spalten **Einheit** und **Beschreibung** unverändert bleiben.

Name	Ausdruck
Fu	$u*(1-u)*(u-a)+lmcpl*ux$
u0	$1/100*(x+50)$
uh	u0

43. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**.

1.6 Integrations-Kopplungsvariablen anlegen

44. Markiere im **Modell-Verzeichnisbaum** den Eintrag **Geom1** durch einen Mausklick mit der linken Taste.

1.6.1 Variablen in Gebieten

45. Wähle in der Menüleiste **Optionen** → **Integrations-Kopplungsvariablen** → **Variablen in Gebieten...**

46. Wähle auf der linken Seite die Registerkarte **Ursprung** und markiere in der **Gebietauswahl** das Gebiet **1** durch einen Mausklick mit der linken Taste.

47. Trage auf der rechten Seite die folgenden Werte in die Tabelle ein

Name	Ausdruck	Integrationsordnung	Globales Ziel
pc1	$\text{diff}(uh,x)*(uh-u)$	2	aktiviert

48. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**.

1.6.2 Variablen auf Rändern

49. Wähle in der Menüleiste **Optionen** → **Integrations-Kopplungsvariablen** → **Variablen auf Rändern...**

1 Die eingefrorene Nagumo-Gleichung (1D)

50. Wähle auf der linken Seite die Registerkarte **Ursprung** und markiere in der **Randauswahl** (ausschließlich) den Rand **1** durch einen Mausklick mit der linken Taste.

51. Trage auf der rechten Seite die folgenden Werte in die Tabelle ein

Name	Ausdruck	Globales Ziel
lmcpl	lm	aktiviert

52. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**.

1.7 Netz-Generierung

53. Markiere im **Modell-Verzeichnisbaum** den Modell-Namen **Geom1** durch einen Mausklick mit der linken Taste.

54. Wähle in der Menüleiste **Netz** → **Freie Netzgenerierungsparameter...** (F9)

55. In der Registerkarte **Global** stellen wir **Maximale Elementgröße** auf 0.1. Der **Maximale Skalierungsfaktor für Elementgröße** wird auf 1 und die **Elementvergrößerungsrate** auf 1.3 gesetzt.

56. Die Registerkarten **Gebiet** und **Rand** bleiben unverändert.

57. Klicke nun auf den Button **Netz generieren** und warte bis das Netz erzeugt wurde.

58. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**.

1.8 Modell lösen

1.8.1 Löserparameter

59. Wähle in der Menüleiste **Lösen** → **Löserparameter...** (F11)

60. Wähle auf der linken Seite unter **Löser** *Zeitabhängig* und mache darunter einen Haken bei der Check-Box **Plotten während des Lösens**.

61. In der Registerkarte **Allgemein**, die sich auf der rechten Seite befindet, geben wir unter **Zeitschrittsteuerung** die **Zeiten** 0:0.01:30, die **Relative Genauigkeit** 0.01 und die **Absolute Genauigkeit** 0.0010 ein. Die Check-Box **Komplexe Zahlen erlauben** bleibt deaktiviert.

62. Die Registerkarten **Zeitschrittsteuerung** und **Erweitert** bleiben in diesem Beispiel unverändert.

63. Bestätige die Eingabe mit **OK**.

1.8.2 Lösermanager

64. Wähle in der Menüleiste **Lösen** → **Lösermanager...**

65. In der Registerkarte **Anfangswert** wählen wir unter **Anfangswert** *Anfangsbedingung* und unter **Werte für nicht zu lösende Variablen und Linearisierungspunkt** *Einstellung aus der Anfangsbedingung verwenden*.

66. In der Registerkarte **Lösen nach** wird aufgeführt, welche Gleichungen des Modells gelöst werden sollen (blau markierter Bereich). An dieser Stelle müssen beide Gleichungen markiert sein, um das gekoppelte System zu lösen. Wenn der Teil **Schwache Form, Rand (phase)** nicht mit markiert wurde, so erhält man die nicht-eingefrorene Nagumo Gleichung, da *lm* standardmäßig auf 0 gesetzt wird. Wir belassen an dieser Stelle beide Gleichungen markiert.

67. In den Registerkarten **Ausgabe** und **Skript** nehmen wir keine weiteren Änderungen vor.

68. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**.

1.8.3 Modell lösen

69. Um die Anfangswertfunktion vor Beginn der Berechnungen nochmals zu betrachten, wähle in der Menüleiste **Lösen** → **Anfangswert übernehmen**.

70. Wähle abschließend in der Menüleiste **Lösen** → **Modell lösen....**

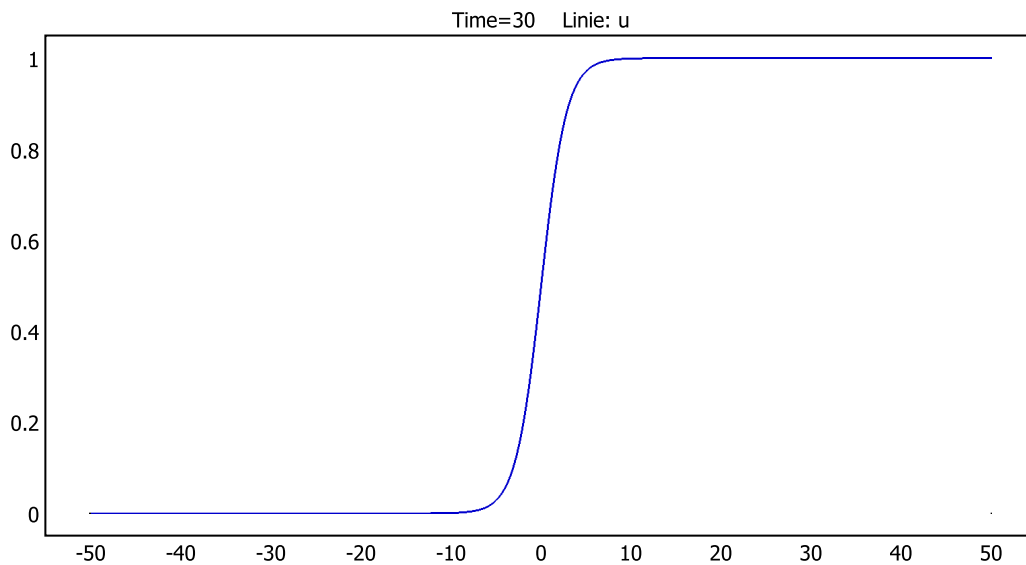
71. Beachte: Falls nachträglich Änderungen am Modell (z.B. Änderung der Konstanten, Randbedingungen, Gebietbedingungen, u.s.w.) vorgenommen werden, muss das Modell (eventuell) zunächst wieder aktualisiert werden. Dies erfolgt über die Menüleiste: **Lösen** → **Modell aktualisieren**. Das Modell muss nun erneut gelöst werden.

1.9 Postprozessing

1.9.1 Abbildung der Lösung

72. Wähle in der Menüleiste **Postprozessing** → **Plotparameter...** (F12)
73. In der Registerkarte **Allgemein** werden Ploteigenschaften (**Linie** (Lösungsgraph durch eine Linie darstellen), **Min/Max-Markierung** (Markierung von Min/Max des Lösungsgraphen) und **Geometriebegrenzungen** (Hervorhebung der Randpunkte)) angezeigt. Beachte: Änderungen in den Plotparametern können durch einen Klick mit der linken Maustaste auf **Zuweisen** direkt (d.h. unmittelbar) angezeigt werden. Wir aktivieren die Check-Boxen **Linie** und **Geometriebegrenzungen**. Unter **zu verwendende Lösung** auf der rechten Seite können wir für **Lösung zur Zeit** einen beliebigen Zeitpunkt auswählen, zu dem wir den Lösungsgraphen betrachten wollen. Wir nehmen hier keine weiteren Änderungen vor. Unter **Darstellung innerhalb** können wir auswählen, ob der Lösungsgraph in Comsol (**Achsen**) oder in einem eigenen Abbildungsfenster (**Neue Abbildung**) angezeigt werden soll. Wir wählen an dieser Stelle **Neue Abbildung**. Unter **Titel...** können wir der Abbildung zudem eine individuelle Abbildungsüberschrift verleihen. Unter **Glätten...** können wir den Lösungsgraphen zudem glatter machen, insofern dieser unerwartete Kanten in seinem Verlauf aufweist. Wir nehmen auch hier keine weiteren Änderungen vor.
74. In der Registerkarte **Linie** können wir unter **Liniendarstellung** auswählen, ob der Funktionsgraph angezeigt werden soll. Unter **Höhendaten** lässt sich bei **Vordefinierte Größen** einstellen, ob die Lösung selbst oder eine bestimmte zeitliche (bzw. räumliche) Ableitung geplottet werden soll. Im Bereich **Linienfarbe** lässt sich unter **Einheitliche Farbe** die Farbe des Funktionsgraphen festlegen. An dieser Stelle ändern wir die Farbe des Lösungsgraphen von schwarz auf blau, indem wir auf den Button **Farbe...** klicken und uns einen entsprechenden Farbtton aussuchen.
75. In der Registerkarte **Min/Max** können wir unter **Min/Max-Markierung** einstellen, ob das Minimum und Maximum der Lösung angezeigt werden sollen. Wir nehmen hier keine Änderungen vor.
76. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**.
77. Im daraufhin erscheinenden Abbildungsfenster wähle zum Speichern der Abbildung das **Diskettensymbol** in der linken oberen Ecke.
78. Im Fenster **Bild exportieren** können die gewünschten Eigenschaften zum Speichern des Bildes vorgenommen werden.
79. Klicke nun auf **Exportieren...**, wähle das gewünschte Verzeichnis sowie den gewünschten Dateinamen und bestätige abschließend auf **Export**. Das Ergebnis ist in der folgenden Abbildung enthalten.
80. Beachte: Hätte man in der Registerkarte **Allgemein** unter **Darstellung innerhalb** den Wert **Achsen** eingegeben, so muss die Abbildung auf eine andere Art und Weise gespeichert werden: Dazu wähle in der Menüleiste **Datei** → **Exportieren** → **Abbildung...** und fahre mit den Schritten 78 und 79 fort.

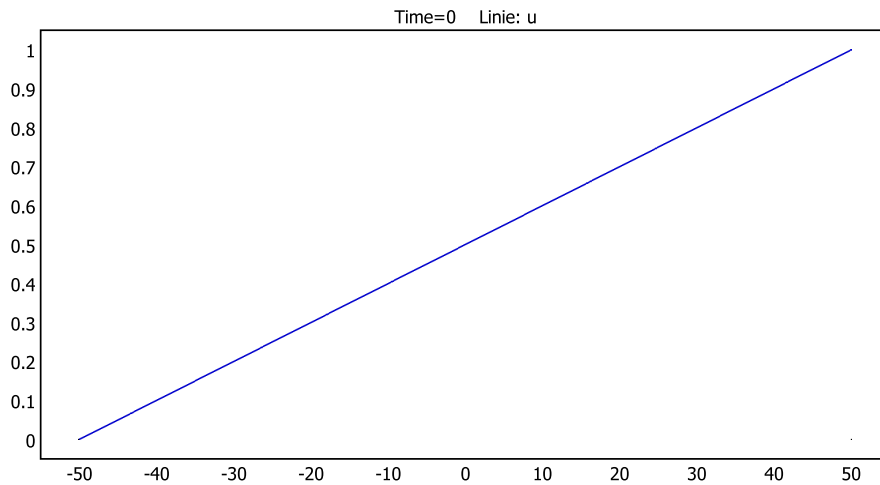
1 Die eingefrorene Nagumo-Gleichung (1D)



1.9.2 Animation des zeitlichen Lösungsverlaufs

81. Wähle in der Menüleiste **Postprozessing** → **Plotparameter...** (F12)
82. In der Registerkarte **Animation** erstellen wir nun ohne großen Aufwand ein kleines Movie. Beachte: Diese lassen sich anschließend auch problemlos (z.B. mit dem movie15-Paket) in mit Latex erstellten Beamer-Vorträgen einbinden. Unter **Animationseinstellungen** wählen wir für den **Ausgabe-Typ** *Film*, **Dateityp** *AVI*, **Breite (in Pixeln)** *640*, **Höhe (in Pixeln)** *480* und unter **Bilder pro Sekunde** *20*. Unter **Erweitert** wählen wir als **Filmqualität** *Beste* und bestätigen auf **OK**. Beachte: Falls man die Dateigröße des Movies klein halten und zudem einen Qualitätsverlust in Kauf nehmen möchte, so sollte man unter **Erweitert** die Check-Box **Animation erstellen aus JPEG-Bildern** aktivieren (und eventuell die **Filmqualität** reduzieren). Da wir das Beste herausholen wollen, belassen wir diese deaktiviert.
83. Bestätige die Eingabe abschließend auf **Animation starten** und warte bis die Animation beendet ist.
84. Im Fenster **COMSOL-Animation**, in dem die Animation durchgelaufen ist, lässt sich die Animation durch einen Klick mit der linken Maustaste auf das Diskettensymbol speichern.
85. Im daraufhin erscheinenden Fenster **Animation speichern als** wählen wir das gewünschte Verzeichnis sowie den gewünschten Dateinamen und bestätigen die Eingaben die einen Klick mit der linken Maustaste auf den Button **Speichern**. Wir erhalten das folgende **Resultat** (Klicke mit der linken Maustaste auf das folgende Bild).
86. Hinweis: Um uns in diesem und in den folgenden Abschnitten etwas Zeit zu sparen, haben wir unter **Löserparameter** in der **Zeitschrittsteuerung** die **Zeiten** von 0:0.01:30 auf 0:0.1:30 abgeändert und das Modell anschließend erneut gelöst. Insofern man die Fehlermeldung *Fehler 6092 Speicherplatz überschritten bei der xmesh-Durchführung* erhält, sollte man beispielsweise (wie im vorherigen Satz vermerkt) die Zeitschrittweite und somit die Menge an gespeicherten Daten reduzieren.

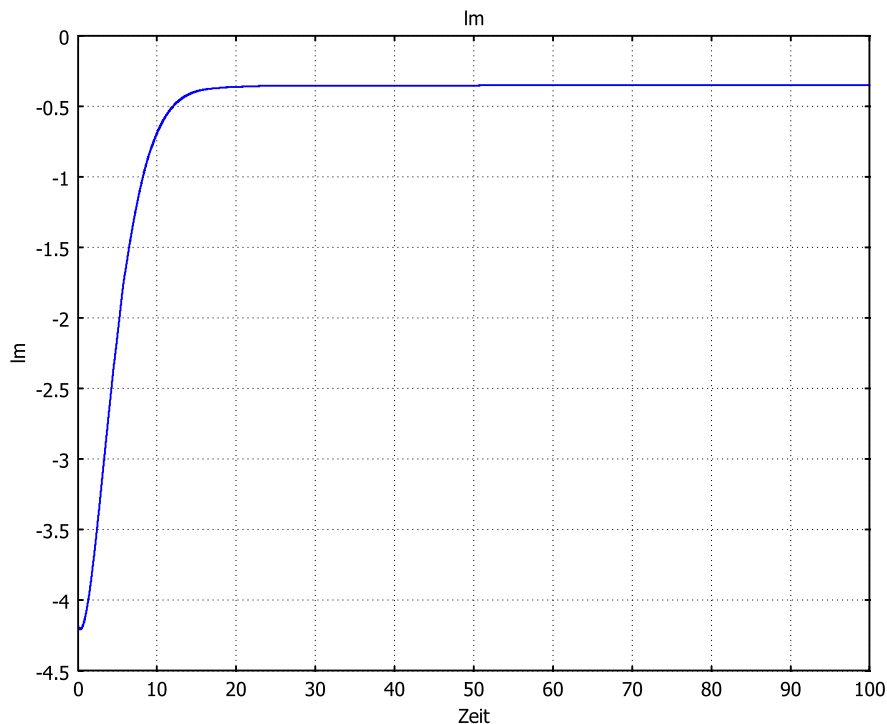
1 Die eingefrorene Nagumo-Gleichung (1D)



1.9.3 Modellbereiche darstellen

Geschwindigkeit der Wellenfront

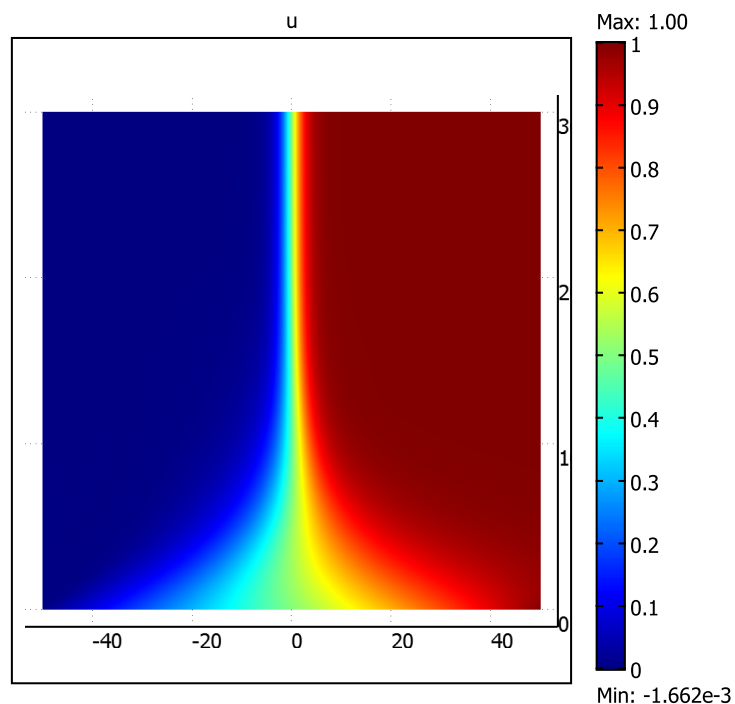
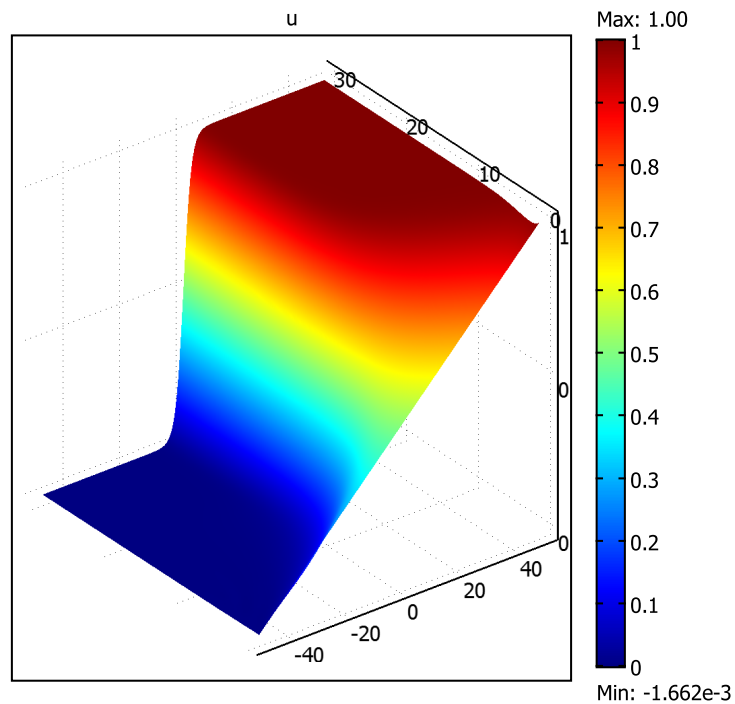
87. Wähle in der Menüleiste **Postprozessing** → **Modellbereiche darstellen...**
88. In der Registerkarte **Allgemein** wähle unter **Plottyp** die **Punkt Darstellung** aus.
89. In der Registerkarte **Punkt** setze **Vordefinierte Größen** auf lm . Dies befindet sich unter **Schwache Form, Rand (phase)**. In der Randauswahl markiere (ausschließlich) den 1. Rand.
90. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**. Das Ergebnis ist in der folgenden Abbildung enthalten. Die Variable lm stellt die Geschwindigkeit der (eingefrorenen) Wellenfront, d.h. der Lösung der Ausgangsgleichung, dar. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Geschwindigkeit der Front mit fortlaufender Zeit konstant wird.



1 Die eingefrorene Nagumo-Gleichung (1D)

Zeitliche Veränderung der Wellenfront

91. Wähle in der Menüleiste **Postprozessing** → **Modellbereiche darstellen...**
92. In der Registerkarte **Allgemein** wähle unter **Plottyp** die **Linien/Extrusions-Darstellung** aus.
93. In der Registerkarte **Linie/Extrusion** setze **Plottyp** auf *Extrusionsdarstellung*. Weiter setze **Vordefinierte Größen** auf *u*.
94. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**. Das Ergebnis ist in den folgenden zwei Abbildung enthalten.



1.10 Ergänzende Einstellungen

95. Wähle in der Menüleiste **Datei** → **Modelleigenschaften...**
96. In der Registerkarte **Allgemein** wählen wir für **Modellname** *Frozen Nagumo-Equation (1D)*, für **Autor** *Vorname Nachname*, für **Firma** *Universität Bielefeld*, für **Abteilung** *Fakultät für Mathematik*, das Feld **Referenz** lassen wir leer und unter **URL** geben wir *http://www.math.uni-bielefeld.de*.
97. In der Registerkarte **Beschreibung** vermerken wir in der **Modellbeschreibung** *Dieses Modell berechnet die Lösung der eingefrorenen eindimensionalen Nagumo-Gleichung für das Intervall von -50 bis 50.*
98. In der Registerkarte **Bemerkung** führen wir unter **Ergebnisbeschreibung** auf *Die Lösung ist eine (mit der Zeit) wandernde Wellenfront. Die Geschwindigkeit der Front (lm) wird von Comsol berechnet und mit fortlaufender Zeit konstant. Mithilfe der Geschwindigkeit kann das Koordinatensystem gemeinsam mit der Wellenfront verschoben werden, was zu der Einfrierung der Lösung führt.*
99. Die Registerkarte **Info** wird von COMSOL automatisch ausgefüllt.
100. Bestätige die Eingabe mit **OK**.
101. Zuletzt werden wir das Modell speichern. Dazu wähle in der Menüleiste **Datei** → **Speichern unter...**
102. Wechsle im Fenster **Speichern unter** in das gewünschte Verzeichnis und gebe den **Dateinamen** *Frozen-Nagumo-1D.mph* ein.
103. Bestätige die Eingabe mit **Speichern** und beende COMSOL Multiphysics.